

Volume des sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Thomas Letendre (ICJ – UMPA)

Lyon – 30 septembre 2016

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n .
On choisit une sous-variété de codimension r de M “au hasard”.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d'Euler, ...)?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, comportement presque sûr...

Racines de polynômes réels

Sur \mathbb{C} , un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Racines de polynômes réels

Sur \mathbb{C} , un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ avec a_i des v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites et $Z_d = P^{-1}(0)$, alors

$$\mathbb{E}[\text{card}(Z_d)] \sim \frac{2}{\pi} \ln(d).$$

Notations

Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note :

- $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$,
- $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$,
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$,
- si $|\alpha| = d$, $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha!}$.

P polynôme homogène de $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$: $P = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha X^\alpha$.

$P^{-1}(0)$ cône de \mathbb{R}^{n+1} , on s'intéresse à $Z_P = P^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^n$.

Le 16ème problème de Hilbert

En dimension $n = 2$, Z_P est génériquement une union disjointe d'ovales.



Problème

Combien Z_P peut-il avoir de composantes connexes (en fonction de d) ?

Quels sont les agencements possibles pour ces composantes ?

Théorème (Harnack, 1876)

Soit $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, X_1, X_2]$ tel que Z_P soit non singulier, alors Z_P a au plus $(d-1)(d-2) + 2$ composantes connexes.

Variables gaussiennes

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N ,
 Λ auto-adjoint et défini positif.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans V est gaussienne, centrée, de variance Λ , si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Lambda^{-1}x, x \rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(\Lambda)$.

Si X est réduite ($\Lambda = \text{Id}$), alors dans toute base orthonormée (e_1, \dots, e_n) ,
 $X = \sum a_i e_i$ avec a_1, \dots, a_n des v.a.i.i.d réelles de loi $\mathcal{N}(1)$.

Quelques propriétés des gaussiennes

- Dans le monde gaussien, deux v.a. sont indépendantes ssi elles sont décorrélées.
- Si $X \sim \mathcal{N}(\Lambda)$ dans V et $L : V \rightarrow V'$ linéaire entre espaces euclidiens, alors on a $L(X) \sim \mathcal{N}(L\Lambda L^*)$.
- Si (X, Y) est gaussien centré de variance $\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & C \end{pmatrix}$, alors la loi de Y sachant que $X = 0$ est aussi gaussienne centrée et sa variance est :

$$C - BA^{-1}B^t.$$

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On considère $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ aléatoire distribué selon la loi de Kostlan :

$$P = \sqrt{\frac{(d+n)!}{\pi^n d!}} \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha,$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(1)$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On considère $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ aléatoire distribué selon la loi de Kostlan :

$$P = \sqrt{\frac{(d+n)!}{\pi^n d!}} \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha,$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(1)$.

Remarque

$P \sim \mathcal{N}(\text{Id})$ dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ pour le produit scalaire L^2 :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\|=1\}} P(z) \overline{Q(z)} d\theta(z).$$

En particulier, la loi de Kostlan est invariante sous l'action de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ par précomposition.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

Soient $d, n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \dots, n\}$,
 P_1, \dots, P_r de degré d indépendants distribués selon la loi de Kostlan,
on note $Z_d = Z_{P_1} \cap \dots \cap Z_{P_r} \subset \mathbb{S}^n$.

Lemme

Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse de codimension r de \mathbb{S}^n .

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout n, r et d , on a : $\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

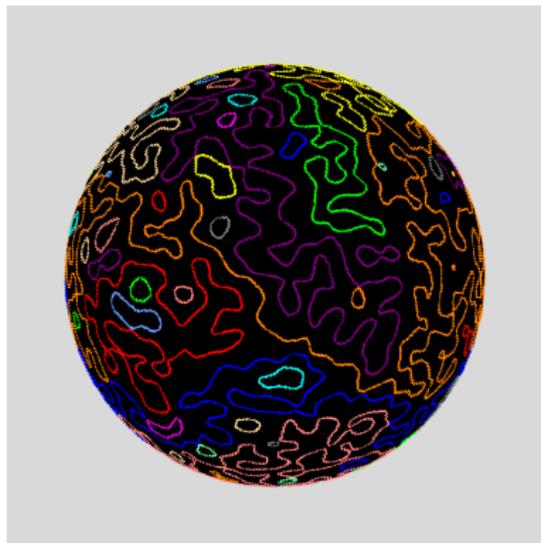
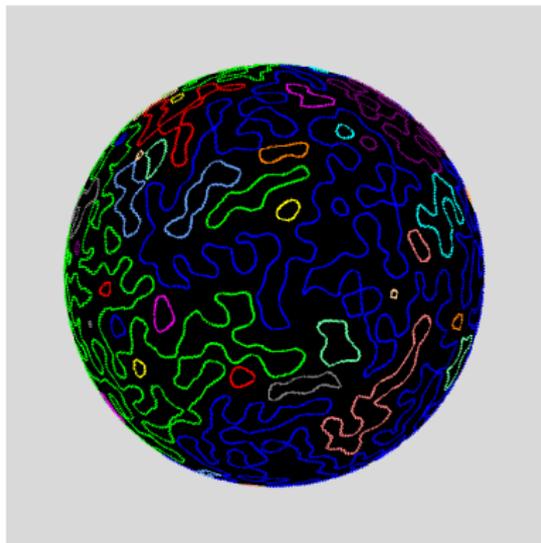


Figure: Courbes aléatoires de degré 56 dans \mathbb{S}^2 dans le modèle de Kostlan.

Images par Maria Nastasescu (Caltech).

Cadre algébrique réel

\mathcal{X} variété projective complexe de dimension n , définie sur les réels.

M lieu réel de \mathcal{X} , supposé non vide.

$(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})$ fibré hermitien de rang r sur \mathcal{X} .

$(\mathcal{L}, h_{\mathcal{L}})$ fibré en droites hermitien positif sur \mathcal{X} .

ω forme de Kähler induite par la courbure de \mathcal{L} .

On suppose que \mathcal{L} et \mathcal{E} sont équipés de structures réelles compatibles.

Cadre algébrique réel

\mathcal{X} variété projective complexe de dimension n , définie sur les réels.

M lieu réel de \mathcal{X} , supposé non vide.

$(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})$ fibré hermitien de rang r sur \mathcal{X} .

$(\mathcal{L}, h_{\mathcal{L}})$ fibré en droites hermitien positif sur \mathcal{X} .

ω forme de Kähler induite par la courbure de \mathcal{L} .

On suppose que \mathcal{L} et \mathcal{E} sont équipés de structures réelles compatibles.

Exemple

$\mathcal{X} = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $M = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$,

\mathcal{E} est le fibré trivial $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$,

\mathcal{L} est $\mathcal{O}(1)$ le fibré des hyperplans et donc ω est la forme de Fubini–Study.

Cadre algébrique réel

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales invariantes par conjugaison de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

ω , $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{E}}$ induisent un produit scalaire L^2 sur $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$.

Définition

$s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(\text{Id})$,
 $Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$.

Cadre algébrique réel

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales invariantes par conjugaison de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

ω , $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{E}}$ induisent un produit scalaire L^2 sur $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$.

Définition

$s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(\text{Id})$,
 $Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$.

Exemple

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d) = (\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n])^r$,
 s_d est un r -uplet de polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants.

Cadre algébrique réel

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales invariantes par conjugaison de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

ω , $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{E}}$ induisent un produit scalaire L^2 sur $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$.

Définition

$s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(\text{Id})$,
 $Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$.

Exemple

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d) = (\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n])^r$,
 s_d est un r -uplet de polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants.

Lemme

Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse de codimension r de M .

Espérance du volume

$|dV_M|$ mesure riemannienne sur M , $|dV_d|$ mesure riemannienne sur Z_d .

Pour tout $\phi \in C^0(M)$, on note $\langle Z_d, \phi \rangle = \int_{Z_d} \phi |dV_d|$.

Théorème (L., 2014)

Pour tout $\phi \in C^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} + \|\phi\|_{C^0} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ .

Espérance du volume

$|dV_M|$ mesure riemannienne sur M , $|dV_d|$ mesure riemannienne sur Z_d .

Pour tout $\phi \in C^0(M)$, on note $\langle Z_d, \phi \rangle = \int_{Z_d} \phi |dV_d|$.

Théorème (L., 2014)

Pour tout $\phi \in C^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} + \|\phi\|_{C^0} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ .

Corollaire

Au sens des mesures de Radon, $d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} |dV_M|$.

Variance du volume

Théorème (L., 2016)

Si $1 \leq r < n$, alors pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right) \mathcal{I}_{n,r} + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right),$$

où $\mathcal{I}_{n,r}$ est explicite et $0 \leq \mathcal{I}_{n,r} < +\infty$.

Variance du volume

Théorème (L., 2016)

Si $1 \leq r < n$, alors pour tout $\phi \in C^0(M)$

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right) \mathcal{I}_{n,r} + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right),$$

où $\mathcal{I}_{n,r}$ est explicite et $0 \leq \mathcal{I}_{n,r} < +\infty$.

Corollaire

$$\text{Var}(\text{Vol}(Z_d)) = d^{r-\frac{n}{2}} \text{Vol}(M) \mathcal{I}_{n,r} + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right).$$

Le cas des points

Pour un polynôme de Kostlan–Shub–Smale dans \mathbb{S}^1 ($n = r = 1$).

Théorème (Kostlan, 1993)

$$\mathbb{E}[\text{card}(Z_d)] = 2\sqrt{d}.$$

Théorème (Dalmao, 2015)

Il existe $\sigma^2 > 0$ explicite tel que :

$$\text{Var}(\text{card}(Z_d)) \sim \sigma^2\sqrt{d}.$$

De plus,

$$\frac{\text{card}(Z_d) - 2\sqrt{d}}{\sigma d^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(1).$$

Concentration en probabilité

Corollaire

Soit $1 \leq r < n$, alors pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{P} \left(\left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \geq d^{\frac{r}{4}} \right) = O\left(d^{\frac{r-n}{2}}\right).$$

Démonstration.

Par l'inégalité de Chebyshev,

$$\mathbb{P} \left(\left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \geq d^{\frac{r}{4}} \right) \leq d^{-\frac{r}{2}} \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = O\left(d^{\frac{r-n}{2}}\right).$$



Équidistribution en probabilité

Corollaire

Soit $1 \leq r < n$, pour tout ouvert $U \subset M$,

$$\mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Équidistribution en probabilité

Corollaire

Soit $1 \leq r < n$, pour tout ouvert $U \subset M$,

$$\mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

On prend $\phi_U \in C^0(M)$, nulle hors de U , strictement positive sur U .

Soit $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \left(\int_M \phi_U |dV_M| \right) \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)}.$$

Pour tout d assez grand,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle] - d^{\frac{r}{2}} \varepsilon \geq \frac{1}{2} d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi_U |dV_M| \right) \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} > 0.$$

Équidistribution en probabilité

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) &= \mathbb{P}(\langle Z_d, \phi_U \rangle = 0) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\langle Z_d, \phi_U \rangle < \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle] - d^{\frac{r}{2}}\varepsilon\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left|\langle Z_d, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle]\right| > d^{\frac{r}{2}}\varepsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{d^r\varepsilon} \text{Var}(\langle Z_d, \phi_U \rangle) \\ &= O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).\end{aligned}$$

Universalité du lieu des zéros

Théorème (Gayet–Welschinger, 2013)

Soient Σ une sous-variété compacte sans bord de codimension r de \mathbb{R}^n et $R > 0$. Il existe $C_{\Sigma,R} \geq 0$ telle que, pour tout $x \in M$,

$$\mathbb{P} \left(Z_d \cap B \left(x, \frac{R}{\sqrt{d}} \right) \supset \Sigma' \text{ avec } \left(B \left(x, \frac{R}{\sqrt{d}} \right), \Sigma' \right) \simeq (\mathbb{R}^n, \Sigma) \right) \geq C_{\Sigma,R}.$$

De plus, $C_{\Sigma,R} > 0$ pour R assez grand.

Universalité du lieu des zéros

Théorème (Gayet–Welschinger, 2013)

Soient Σ une sous-variété compacte sans bord de codimension r de \mathbb{R}^n et $R > 0$. Il existe $C_{\Sigma,R} \geq 0$ telle que, pour tout $x \in M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right) \supset \Sigma' \text{ avec } \left(B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right), \Sigma'\right) \simeq (\mathbb{R}^n, \Sigma)\right) \geq C_{\Sigma,R}.$$

De plus, $C_{\Sigma,R} > 0$ pour R assez grand.

Théorème (Gayet–Welschinger, 2011)

Dans le cas des courbes dans \mathbb{S}^2 , il existe C_1 et $C_2 > 0$ telles que :

$$\mathbb{P}(Z_d \text{ a le nombre maximal de composantes connexes}) \leq C_1 e^{-dC_2}.$$

La fonction de corrélation

Soit P un polynôme de Kostlan dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Ce processus est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)].$$

La fonction de corrélation

Soit P un polynôme de Kostlan dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Ce processus est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)].$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P(x)P(y)] &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} (\langle x, y \rangle)^d \\ &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \cos(D(x, y))^d. \end{aligned}$$

La fonction de corrélation

Soit P un polynôme de Kostlan dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Ce processus est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)].$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P(x)P(y)] &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} (\langle x, y \rangle)^d \\ &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \cos(D(x, y))^d. \end{aligned}$$

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\partial_x e_d(x, y) = \mathbb{E}[(d_x P)P(y)]$.

Limite d'échelle du noyau de Bergman

Dans le cas général, la fonction de corrélation e_d est le noyau de Bergman.

On a une limite d'échelle universelle pour e_d (Ma–Marinescu, 2007) :

$$e_d(x, y) \simeq \frac{d^n}{\pi^n} \exp\left(-\frac{d}{2} \|x - y\|^2\right),$$

dès que $D(x, y) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Théorème (Ma–Marinescu, 2015)

Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|e_d(x, y)\|_{C^k} = O\left(d^{n+\frac{k}{2}} \exp\left(-C\sqrt{d}D(x, y)\right)\right),$$

indépendamment de (x, y) .

Une heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \text{Vol}(M) d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Une heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \text{Vol}(M) d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$, donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{n-r}{2}}$.

Finalement $\text{Vol}(Z_d)$ est proportionnel à $\text{Vol}(M) d^{\frac{r}{2}}$.

Formule de Kac–Rice

On se place dans le cas des hypersurfaces ($r = 1$).

$P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ de loi $\mathcal{N}(\text{Id})$, $Z_d = P^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^n$.

Formule de Kac-Rice

Pour tout ϕ ,

$$\mathbb{E} \left[\int_{Z_d} \phi |dV_d| \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E} \left[\|d_x P\| \mid P(x) = 0 \right]}{\sqrt{e_d(x, x)}}.$$

Dans le cas général, $x \mapsto e_d(x, x)$ ne s'annule pas pour d assez grand (i.e. la distribution de $P(x)$ n'est pas dégénérée).

Alors formule similaire.

Asymptotique de l'espérance

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x, x)}}.$$

On a $e_d(x, x) \sim \frac{d^n}{\pi^n}$. Il faut estimer $\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]$.

Asymptotique de l'espérance

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x, x)}}.$$

On a $e_d(x, x) \sim \frac{d^n}{\pi^n}$. Il faut estimer $\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]$.

$(P(x), d_x P)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x, x) & \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \partial_{x_1} e_d(x, x) & \partial_{x_1} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x, x) & \partial_{x_n} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{y_n} e_d(x, x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x P$ est une gaussienne centrée.

Sa variance s'obtient à partir de Λ .

Asymptotique de l'espérance

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x, x)}}.$$

On a $e_d(x, x) \sim \frac{d^n}{\pi^n}$. Il faut estimer $\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]$.

$(P(x), d_x P)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x, x) & \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \partial_{x_1} e_d(x, x) & \partial_{x_1} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x, x) & \partial_{x_n} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{y_n} e_d(x, x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x P$ est une gaussienne centrée.

Sa variance s'obtient à partir de Λ .

On utilise les estimations sur e_d pour conclure.

Asymptotique de la variance

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle^2] - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]^2.$$

Par Kac–Rice, $\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]^2$ vaut :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x,y \in \mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y) \frac{\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x,x)}} \frac{\mathbb{E}[\|d_y P\| \mid P(y) = 0]}{\sqrt{e_d(y,y)}}.$$

Asymptotique de la variance

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle^2] - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]^2.$$

Par Kac–Rice, $\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]^2$ vaut :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x,y \in \mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y) \frac{\mathbb{E}[\|d_x P\| \mid P(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x,x)}} \frac{\mathbb{E}[\|d_y P\| \mid P(y) = 0]}{\sqrt{e_d(y,y)}}.$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle^2] = \mathbb{E}\left[\int_{x,y \in Z_d} \phi(x)\phi(y) |dV_d|^2\right].$$

Formule de Kac–Rice 2

Pour d assez grand, on a $\det \begin{pmatrix} e_d(x, x) & e_d(x, y) \\ e_d(y, x) & e_d(y, y) \end{pmatrix} \neq 0$, dès que $x \neq y$ (i.e. la loi $(P(x), P(y))$ n'est pas dégénérée).

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E} \left[\int_{x, y \in Z_d} \phi(x) \phi(y) |dV_d|^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{x, y \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \phi(y) \frac{\mathbb{E} \left[\|d_x P\| \|d_y P\| \mid P(x) = 0 = P(y) \right]}{\sqrt{e_d(x, x)e_d(y, y) - e_d(x, y)^2}}.$$

Asymptotique de la variance

Finalement

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = \frac{1}{2\pi} \int_{x,y \in \mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y) \mathcal{D}_d(x,y),$$

avec

$$\mathcal{D}_d(x,y) = \frac{\mathbb{E} \left[\|d_x P\| \|d_y P\| \mid P(x) = 0 = P(y) \right]}{\sqrt{e_d(x,x)e_d(y,y) - e_d(x,y)^2}} \\ - \frac{\mathbb{E} \left[\|d_x P\| \mid P(x) = 0 \right]}{\sqrt{e_d(x,x)}} \frac{\mathbb{E} \left[\|d_y P\| \mid P(y) = 0 \right]}{\sqrt{e_d(y,y)}}.$$

Asymptotique de la variance

Pour $D(x, y) \geq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$, on montre que $\mathcal{D}_d(x, y)$ est $O\left(d^{r-\frac{n}{2}-1}\right)$.

Par ailleurs $\frac{1}{d^r} \mathcal{D}_d\left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \mathcal{D}(z)$.

$$\begin{aligned} \int_{x, y \in \mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d(x, y) &\simeq \int_{x \in \mathbb{S}^n} \int_{y \in B(x, \frac{\ln d}{\sqrt{d}})} \phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d(x, y) \\ &\simeq d^{-\frac{n}{2}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \int_{z \in B(0, \ln d)} \phi(x)\phi\left(x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \mathcal{D}_d\left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \\ &\simeq d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x)^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}(z) \right). \end{aligned}$$

Équidistribution presque sûre

On considère une suite aléatoire de polynômes de degrés croissants :

$$(P_d)_{d \in \mathbb{N}^*} \in \prod_{d \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n],$$

distribuée selon la loi $d\nu$, produit des lois de Kostlan.

Corollaire

Si $n \geq 3$, alors $d\nu$ -presque sûrement on a :

$$\forall \phi \in C^0(\mathbb{S}^n), \quad \frac{1}{\sqrt{d}} \langle Z_{P_d}, \phi \rangle \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} \phi.$$

Équidistribution presque sûre

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{d \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}} (\langle Z_{P_d}, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]) \right)^2 \right] = \sum_{d \geq 1} \frac{1}{d} \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) < +\infty,$$

car $\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{1-\frac{3}{2}})$. Donc $d\nu$ -p.s.

$$\sum_{d \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}} (\langle Z_{P_d}, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]) \right)^2 < +\infty,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \langle Z_{P_d}, \phi \rangle \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{d\nu\text{-p.s.}} \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} \phi.$$

On conclut par séparabilité de $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$.

The end

Merci de votre attention.